Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA2112. Segundo Examen Parcial 7.30am. Tipo A.
SOLUCIONES

1. (13 ptos)

Pregunta (a) Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un campo escalar C^1. Sea $\sigma : [a,b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria C^1. Probar que:

$$\int_\sigma \nabla f ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \ .$$

(b) Sea $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R^2}$ el campo vectorial definido por:

$$F(x,y) = (e^{x+y}, e^{x+y}) \ .$$

Sea $\sigma : [0,\pi] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ la trayectoria definida por:

$$\sigma(t) = (cos^7(t), sin^7(t)) \ .$$

Calcular la integral de línea $\int_\sigma F ds$.

Respuesta (a) Notemos que $f \circ \sigma$ es una función C^1, ya que f y σ lo son.

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \nabla f ds &= \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \qquad \text{(por def. integral de línea)} \\
&= \int_a^b (f \circ \sigma)'(t) dt \qquad \text{(por regla de la cadena)} \\
&= (f \circ \sigma)(b) - (f \circ \sigma)(a) \\
& \text{(por teorema fundamental del cálculo).}
\end{aligned}$$

(b) Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ el campo escalar definido por $f(x,y) = e^{x+y}$. Notemos que $F = \nabla f$ y puesto que F es contínua, entonces f es C^1. Además σ es C^1 ya que sus funciones componentos son potencias de funciones C^1. Por lo tanto podemos aplicar el resultado de la parte (a).

$$\begin{aligned}
\int_\sigma F ds &= \int_\sigma \nabla f ds \\
&= (f \circ \sigma)(\pi) - (f \circ \sigma)(0) \qquad \text{:por parte (a),} \\
&= f(cos^7(\pi), sin^7(\pi)) - f(cos^7(0), sin^7(0)) \\
&= \frac{1}{e} - e.
\end{aligned}$$

2. (12 Ptos.)

Pregunta Sea a un número real positivo fijo. Calcular el volumen del conjunto W_a definida por:

$$W_a = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 2az \leq 4a^2\} \ .$$

Respuesta Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad \frac{x^2 + y^2}{2a} = z\} \ , \\ \Pi &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : \quad 2a = z\} \ , \\ D &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 4a^2\} \ . \end{aligned}$$

Entonces el volumen de W_a es igual al volumen del conjunto delimitado por la superficie de revolución Σ y por el plano Π.

El volumen delimitado por Σ, el plano de ecuación $z = 0$ y el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4a^2$ es:

$$\begin{aligned} V_1 = \int\int_D \frac{x^2 + y^2}{2a} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2a} \frac{r^2}{2a} r \, dr \, d\theta \\ & \qquad \text{cambio a coordenadas polares,} \\ &= 4\pi a^3 \ . \end{aligned}$$

El volumen de la sección del cilindro delimitado por Σ, el plano Π y el plano $z = 0$ es $V_2 = 2a \cdot \pi (2a)^2$.

Por lo tanto el volumen de W_a es $V_2 - V_1 = 4\pi a^3$.

3. (12 Ptos.)

Pregunta Sea el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definido por

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^3)\vec{\imath} + (y^2 + x^3)\vec{\jmath}.$$

Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\vec{F}$ para mover una partícula desde el punto $(4, 0)$ una vuelta completa, en el sentido positivo, a lo largo del borde de una cirunferencia de radio 4. (Sugerencia: utilize el Teorema de Green de una manera **debidamente justificada**.)

Respuesta Las funciones $P(x, y) = x^2 - y^3$ y $Q(x, y) = y^2 + x^3$ son C^1. Y la región delimitada por una circunferencia es de tipo 3, por lo tanto podemos aplicar el Teorema de Green.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} \vec{F} ds &= \int_{\partial D^+} (x^2 - y^3)dx + (y^2 + x^3)dy \\
&= \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \qquad \text{por Teorema de Green,} \\
&= \int\int_D 3(x^2 + y^2)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2 r dr d\theta \qquad \text{cambio a coordenadas polares,} \\
&= 384\pi
\end{aligned}$$

4. (13 Ptos.)

Pregunta Sea a un número real positivo fijo. Sea el cilindro, S_a, definido por:

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad : 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq a\}.$$

Calcular el centro de masa del cilindro S_a cuya densidad de masa, δ, está definida por:

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Respuesta

$$\begin{aligned}
m &= \int\int\int_{S_a} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 dr d\theta dz \\
&= \frac{\pi a^4}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m}\int\int\int_{S_a} x\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz \\
&= \frac{1}{m}\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 cos(\theta) dr d\theta dz \\
&= \frac{1}{m}\frac{a^5}{4} \\
&= \frac{3a}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Por simetría entre las variables x et y, $\bar{y} = \bar{x}$. Por homogeneidad de la densidad con respecto a la variable z, $\bar{z} = \frac{a}{2}$. Por lo tanto el centro de masa de S_a tiene por coordenadas $(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi}, \frac{a}{2})$.